Maranda Linț
Dorin Linț
Rozalia Marinescu
Dan Ștefan Marinescu
Mihai Monea
Steluța Monea
Marian Stroe

Matematică de excelență

pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență

clasa a VI-a

Ediția a II-a

mate 2000 – excelență

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

CUPRINS

Capitolul I
NUMERE NATURALE

I.1. PROPRIETĂŢILE RELAŢIEI DE DIVIZIBILITATE ÎN ℕ.

CRITERII DE DIVIZIBILITATE. NUMERE PRIME, NUMERE COMPUSE PĂTRAT PERFECT, CUB PERFECT, ULTIMA CIFRĂ A UNUI NUMĂR NATURAL.

A. ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ

A1: Proprietăţile relaţiei de divizibilitate, criterii de divizibilitate

Numărul natural a se divide la numărul natural b dacă există un număr natural c astfel încât $a=b\cdot c$.

Notăm $b|a$ (b divide a) sau $a\vdots b$ (a se divide la b).

1. Proprietăţile relaţiei de divizibilitate

1.1. $a|a,\ \forall a\in\mathbb{N}$;

1.2. Dacă $a,b\in\mathbb{N}^*$, $a|b$ şi $b|a$, atunci $a=b$;

1.3. Dacă $a,b,c\in\mathbb{N}^*$, $a|b$ şi $b|c$, atunci $a|c$.

2. Se deduc, de asemenea, următoarele proprietăţi:

2.1. Dacă $a,b\in\mathbb{N}^*$ şi $b|a$, atunci $b|(na),\forall\in\mathbb{N}$.

Demonstraţie: $b|a\Rightarrow\exists k\in\mathbb{N}$ astfel încât $a=b\cdot k\Rightarrow na=n\cdot bk=b\cdot(nk)\Rightarrow b|(na)$.

EXEMPLUL 1: $15763\cdot 25\vdots 5$ pentru că $25\vdots 5$.

2.2. Dacă $a,b,d\in\mathbb{N}^*,d|a$ şi $d|b$, atunci $d|(a+b)$.

Demonstraţie:

$d|a$ şi $d|b\Rightarrow\exists k_1,k_2\in\mathbb{N}$ a.î. $a=d\cdot k_1$ şi $b=d\cdot k_2\Rightarrow a+b=d(k_1+\ k_2)\Rightarrow(a+b)\vdots d$.

EXEMPLUL 2: $\left(5^7\cdot 29+29^3\cdot 7\right)\vdots 29$ pentru că $5^7\cdot 29\vdots 29$ şi $29^3\cdot 7\vdots 29$.

2.3. Dacă $a,b,d\in\mathbb{N}^*,d|a,\ d|b$ şi $a\geq b$, atunci $d|(a-b)$.

EXEMPLUL 3: $\left(75398-2^6\right)\vdots 2$ *pentru că* $75398\vdots 2$ şi $2^6\vdots 2$.

2.4. Dacă $d,a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{N}$ şi $d|a_1,d|a_2,...,d|a_n$, atunci

$d|a_1b_1\pm a_2b_2\pm...\pm a_nb_n),\ \ \forall b_1,b_2,...,b_n\in\mathbb{N}$ pentru care $a_1b_1\pm a_2b_2\pm...\pm a_nb_n\in\mathbb{N}$.

Demonstraţia se obţine din 2.1., 2.2., 2.3, dar depăşeşte cadrul lucrării.

EXEMPLUL 4: $7|\left(2^9\cdot 7+2^8\cdot 7^2-2^7\cdot 7^3\right)$, pentru că $7|7;7|7^2;7|7^3$.

Două numere naturale pentru care singurul divizor comun este 1 se numesc numere prime între ele. Vom scrie $(a, b) = 1$.

2.5. Dacă $a,b,c\in\mathbb{N}^*$, $a\vdots b, a\vdots c$ şi $(b,c)=1$, atunci $a\vdots(b\cdot c)$.

EXEMPLUL 5: $(5^3\cdot7^9-5)\vdots10$ pentru că $(5^3\cdot7^9-5)\vdots5$ şi $(5^3\cdot7^9-5)\vdots2$.

2.6. Dacă $a,b,d\in\mathbb{N}^*$, $d|(a+b)$ şi $d|a$, atunci $d\,|\,b$.

Demonstraţie: $d|(a+b)$ şi $d|a\Rightarrow\exists k_1,k_2\in\mathbb{N}$ astfel încât $a+b=d\cdot k_1$ şi $a=d\cdot k_2\Rightarrow b=d(k_1-k_2)\Rightarrow d|b$.

Observaţie: Prin reducere la absurd, se obţine imediat următoarea afirmaţie: Dacă $a,b,d\in\mathbb{N}^*$, $d|a$ şi $d\nmid b$, atunci $d\nmid(a+b)$.

EXEMPLUL 6: Dacă $x,y\in\mathbb{N}^*$, $a=x+3y$, $b=3x+7y$, atunci $(a+b+3)\not\vdots\,2$.

Într-adevăr, $a+b=2(2x+5)$ şi $a+b\vdots2$.

Cum $3\not\vdots\,2\Rightarrow(a+b+3)\not\vdots\,2$.

3. Criterii de divizibilitate

Fie $a=\overline{a_1a_2...a_n}$ număr natural. Atunci, $a_1\cdot10^{n-1}+a_2\cdot10^{n-2}+...+a_{n-1}\cdot10+a_n=$ $=10(a_1\cdot10^{n-2}+a_2\cdot10^{n-3}+...+a_{n-1})+a_n$.

Se pot deduce imediat criteriile de divizibilitate cu 2, 5, 10.

3.1. Un număr natural *a* se divide la 2 dacă şi numai dacă $u(a)\in\{0,2,4,6,8\}$.

Observaţie: Vom numi număr natural par un număr natural, divizibil cu 2 şi vom numi număr impar un număr natural care nu se divide la 2.

Folosind teorema împărţirii cu rest, orice număr natural se poate scrie în una din formele $a = 2k$ sau $a = 2k+1$. Se obţin astfel două mulţimi disjuncte ale mulţimii numerelor naturale.

$\mathbb{N}=\{2k|k\in\mathbb{N}\}\cup\{2k+1|k\in\mathbb{N}\}$.

EXEMPLUL 7: a) Suma oricăror două numere naturale care au aceeaşi paritate este un număr par;

b) Suma oricăror două numere naturale care au parităţi diferite este un număr impar.

Fie *a* şi *b* cele două numere.

a) Dacă *a* şi *b* sunt pare, atunci $u(a)$ şi $u(b)\in\{0,2,4,6,8\}$

$\Rightarrow u(a+b)=u(u(a)+u(b))\in\{0,2,4,6,8\}\Rightarrow(a+b)$ este par.

Dacă *a* şi *b* sunt impare, atunci $u(a)$, $u(b)\in\{1,3,5,7,9\}\Rightarrow u(a+b)\in\{0,2,4,6,8\}\Rightarrow(a+b)$ este număr par.

b) Dacă *a* este par şi *b* este impar $\Rightarrow\exists k_1,k_2\in\mathbb{N}$, astfel încât $a=2k_1$ şi $b=2k_2+1\Rightarrow$ $\Rightarrow a+b=2(k_1+k_2)+1\Rightarrow a+b$ este număr impar.

3.2. Un număr natural a se divide la 5 dacă şi numai dacă $u(a)\in\{0,5\}$.

EXEMPLUL 8: $a=768979-144444$ se divide la 5 pentru că $u(a)=5$.

3.3. Un număr natural *a* se divide la 10 dacă şi numai dacă $u(a)=0$.

Observaţie: Un număr natural se divide la 10 dacă şi numai dacă se divide la 2 şi la 5.

EXEMPLUL 9: $(6^{10}-2^4)\vdots 10$ pentru că $u(6^{10}-2^4)=0$.

Considerăm:

$a=\overline{a_1a_2...a_n}=a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+...+a_{n-1}\cdot 10+a_n=$

$=100(a_1\cdot 10^{n-3}+a_2\cdot 10^{n-4}+...+a_{n-2})+\overline{a_{n-1}a_n}$.

Obţinem, astfel, criteriile de divizibilitate cu 4, 25, 100.

3.4. Un număr natural se divide la 4 dacă şi numai dacă numărul format cu ultimele două cifre ale sale se divide la 4.

3.5. Un număr natural se divide la 25 dacă şi numai dacă numărul format cu ultimele două cifre ale sale se divide la 25.

3.6. Un număr natural se divide la 100 dacă şi numai dacă ultimele două cifre ale sale sunt nule.

EXEMPLUL 10: $75896432\vdots 4$ pentru că $u_2(75896432)=32$ şi $32\vdots 4$.

$1765935 \not\vdots\, 25$ pentru că $u_2(1765935)=35$ şi $35\not\vdots\, 25$.

Vom nota M_a un multiplu oarecare al numărului a. Astfel, sunt utile următoarele precizări:

a) $(a+b)^n=M_a+b^n$; $(a+b)^n=a^n+M_b$, $\forall n\in\mathbb{N}$;

b) $(a-b)^{2n}=M_a+b^{2n}$; $(a-b)^{2n}=a^{2n}+M_b$;

c) $(a-b)^{2n+1}=M_a-b^{2n+1}$; $(a-b)^{2n+1}=a^{2n+1}+M_b$.

EXEMPLUL 11: $10^n=(9+1)^n=M_9+1$. Cum multiplii lui 9 sunt şi multipli ai lui 3, putem scrie $10^n=M_3+1$.

Putem observa că $a=\overline{a_1a_2...a_n}=(M_9+1)\cdot a_1+(M_9+1)\cdot a_2+...+(M_9+1)\cdot a_{n-1}+a_n=$ $=M_9+(a_1+a_2+...+a_n)$ şi obţinem:

3.7. Un număr natural se divide la 3 dacă şi numai dacă suma cifrelor sale se divide la 3.

EXEMPLUL 12: Numărul $a=\underbrace{40...0}_{2013\text{ termeni}}8$ se divide la 3 pentru că $s(a)=4+8=12$ şi $12\vdots 3$.

3.8. Un număr natural se divide la 9 dacă şi numai dacă suma cifrelor sale se divide la 9.

EXEMPLUL 13: Orice număr de 9 cifre cu toate cifrele identice este divizibil la 9.

În mod asemănător se pot obţine criterii de divizibilitate cu divizorii lui 1000, adică 8, 125, 1000, folosind numărul format cu ultimele trei cifre ale numărului dat.

Folosind $10^{2n}=(11-1)^{2n}=M_{11}+1$ şi $10^{2n+1}=M_{11}-1$, putem obţine:

3.9. Un număr natural se divide la 11 dacă şi numai dacă diferenţa dintre suma cifrelor situate pe poziţii pare şi suma cifrelor situate pe poziţii impare se divide la 11.

EXEMPLUL 14: $321465903\vdots 11$ pentru că $(3+1+6+9+3)-(2+4+5+0)=$ $=22-11=11\vdots 11$.

EXEMPLUL 15: Aflaţi câte numere naturale de forma $n=\overline{abcde}$ au proprietatea $\left(\overline{abc}+\overline{de}\right)\vdots 11$.

$n=\overline{abc}\cdot 10^2+\overline{de}=\overline{abc}\cdot 99+\overline{abc}+\overline{de}.$

$\left(\overline{abc}+\overline{de}\right)\vdots 11 \Rightarrow n\vdots 11$. Există 90 000 de numere de 5 cifre, dintre care 8181 se divid la 11.

3.10. Un număr $a=\overline{a_1a_2...a_n}$ se divide la $d\in\{7,11,13\}$ dacă şi numai dacă $\overline{a_1a_2...a_{n-3}}-\overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$ se divide la d.

Observaţie: $\{7,11,13\}\subset D_{1001}$.

A2: Numere prime, numere compuse

Mulţimea numerelor prime reprezintă o clasă foarte importantă de numere naturale. Majoritatea rezultatelor importante ale teoriei numerelor, referitoare la numere prime, depăşesc nivelul clasei a VI-a şi ele vor putea fi completate progresiv în clasele următoare.

Numim număr *prim* orice număr natural $p\geq 2$, care are exact doi divizori: pe 1 şi pe el însuşi.

Observaţie:

1. Numerele 0 şi 1 nu sunt numere prime.
2. Singurul număr par, care este număr prim, este numărul 2. (Toate celelalte numere pare se divid la 2, deci au cel puţin trei divizori.)

Orice număr $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, care *nu este* număr prim, se numeşte număr *compus*.

Se pun următoarele întrebări:

1. Câte numere prime există?
2. Care este forma numerelor prime?

La prima întrebare, răspunsul este dat de următorul rezultat:

Teorema 1: Există o infinitate de numere prime.

Demonstraţie: Presupunem că nu există o infinitate de numere prime. Fie n numărul acestora. Mulţimea numerelor prime va fi $P=\{p_1,p_2,...p_n\}$. Vom demonstra că numărul $p=p_1\cdot p_2\cdot ...\cdot p_n+1$ este număr prim.

Este evident că $p>p_i$, $\forall i=\overline{1,n}$ şi că p_i nu este divizor al lui p, $\forall i=\overline{1,n}$. Rezultă că p nu se divide la niciun număr prim, adică este el însuşi număr prim. Cum $p\notin P$, se constată o contradicţie între presupunerea că toate numerele prime sunt în mulţimea P şi faptul că $p\notin P$, deşi p este număr prim. În consecinţă, presupunerea a fost falsă şi există un număr infinit de numere prime.

A3: Pătrate perfecte

1. ***Pentru a demonstra că un număr natural este pătrat perfect putem folosi unul dintre rezultatele următoare:***

1.1. Un număr natural n este pătrat perfect dacă există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = k^2$.

EXEMPLUL 1: $0 = 0^2$; $1 = 1^2$; $16 = 4^2$; $169 = 13^2$. Vom spune că 0, 1, 16, 169 sunt pătrate perfecte.

EXEMPLUL 2: Dacă $a \in \mathbb{N}$, atunci a^6 este pătrat perfect pentru că $a^6 = \left(a^3\right)^2$ și $a^3 \in \mathbb{N}$.

1.2. Produsul a două pătrate perfecte este un pătrat perfect.

Demonstrație: Fie $a = n^2$ și $b = m^2$ cu $m, n \in \mathbb{N}$.

Atunci $a \cdot b = n^2 \cdot m^2 = (n \cdot m)^2$ și $n \cdot m \in \mathbb{N}$, deci $a \cdot b$ este pătrat perfect.

EXEMPLUL 3: $64^n \cdot 9^{3k} = \left(8^n\right)^2 \cdot \left(3^{3k}\right)^2 \Rightarrow 64^n \cdot 9^{3k}$ este pătrat perfect.

1.3. Rezultatul anterior se poate generaliza:

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sunt pătrate perfecte, atunci produsul $p = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$ este pătrat perfect.

EXEMPLUL 4: $64^n \cdot 9^{3n} \cdot 21^6 = \left(8^n\right)^2 \cdot \left(3^{3n}\right)^2 \cdot \left(21^3\right)^2$ este pătrat perfect pentru că se scrie ca produs de pătrate perfecte.

Observație: Pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$ pătrat perfect, atunci $p = \left(a_1\right)^k$ este pătrat perfect, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.

EXEMPLUL 5: $81^n \cdot 16^{3n} = \left[\left(9 \cdot 4^3\right)^2\right]^n$ este pătrat perfect pentru că se scrie ca putere cu exponent natural a unui pătrat perfect.

1.4. Orice putere cu exponent par a unui număr natural este pătrat perfect.

Într-adevăr, pentru $k \in \mathbb{N}^*$, $k^{2n} = (k^n)^2$ și $k^n \in \mathbb{N}^*$, rezultă k^{2n} este pătrat perfect.

Observație: Dacă un număr natural este scris ca putere cu exponent impar *nu rezultă* că acesta nu e pătrat perfect.

EXEMPLU 6: $64 = 4^3$ este putere cu exponent impar dar, $64 = 8^2$ și este pătrat perfect.

1.5. Un număr natural, descompus în factori primi, este pătrat perfect dacă și numai dacă toți factorii sunt pătrate perfecte.

Demonstrație: Fie $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ cu $p_1, p_2, \ldots, p_k$ numere prime distincte.

Dacă $p_1^{n_1}; p_2^{n_2}; \ldots; p_k^{n_k}$ sunt pătrate perfecte $\overset{1.3}{\Rightarrow}$ a este pătrat perfect.

Pentru implicația reciprocă facem precizarea că, dacă a este pătrat perfect, iar p este un număr prim, divizor al lui a, atunci p^2 va fi, de asemenea, divizor al lui a.

Considerăm acum a pătrat perfect cu descompunerea în factori primi $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$. Rezultă că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $p_1^{n_1} . p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k} = n^2$. De aici, $p_i \mid n^2$, $\forall\, i = \overline{1,k}$. Cum descompunerea în factori este unică, rezultă $n_i \,\vdots\, 2$, $\forall\, i = \overline{1,k} \Rightarrow$ toți factorii $p_i^{n_i}$ sunt puteri cu exponent par ale unor numere naturale $\overset{1.4}{\Rightarrow}$ sunt pătrate perfecte.

1.6. Orice pătrat perfect nenul se poate scrie ca sumă de numere naturale impare consecutive cu primul termen al sumei 1.

Demonstrație: Fie $a=n^2, n\neq 0$ pătrat perfect nenul. Vom demonstra că $a=1+3+5+...+(2n-1)$.

$$1+3+5+...+(2n-1)=(1+2+3+...+2n)-2(1+2+...+n)=\frac{2n(2n+1)}{2}-2\cdot$$

$$\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(2n+1)-n(n+1)=2n^2+n-n^2-n=n^2\Rightarrow n^2=1+3+5+...+(2n-1).$$

EXEMPLUL 7: Numărul $a=4+4\cdot3+4\cdot5+4\cdot7+...+4\cdot99$ este pătrat perfect pentru că $a=4(1+3+5+...+99)=2^2\cdot(1+3+5+...(2\cdot50-1))=2^2\cdot50^2=100^2$ și este pătrat perfect.

2. *Pentru a demonstra că un număr natural nu este pătrat perfect putem folosi:*

2.1. Dacă cifra unităților unui număr natural aparține mulțimii $\{2,3,7,8\}$, atunci acel număr nu este pătrat perfect.

Demonstrație: Vom arăta că, dacă *a* este pătrat perfect, atunci cifra unităților numărului *a* este una dintre cifrele: 0, 1, 4, 5, 6, 9. Într-adevăr, considerând $a=k^2, k\in\mathbb{N}$ și notând $u(x)\overset{not}{=}$ cifra unităților numărului *x*, obținem corespondența descrisă de tabelul următor:

$u(k)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u(k^2)$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

$u(a)=u(k^2)\in\{0,1,4,5,6,9\}$.

EXEMPLUL 8: Numărul 2170573 nu este pătrat perfect pentru că *u*(2170573) = 3 și $3\notin\{0,1,4,5,6,9\}$

Observație: Dacă $a\in\mathbb{N}$ și $u(a)\in\{0,1,4,5,6,9\}$, *nu rezultă* că *a* este pătrat perfect.

EXEMPLUL 9: $u(19)=9\in\{0,1,4,5,6,9\}$ și 19 nu este pătrat perfect.

2.2. Între două pătrate perfecte consecutive n^2 și $(n+1)^2$ există exact $2n$ numere naturale, dar niciunul dintre ele nu este pătrat perfect.

EXEMPLUL 10: Produsul a două numere naturale nenule consecutive nu este pătrat perfect.

Vom demonstra că, oricare ar fi două numere naturale consecutive n și $n+1$, produsul lor este cuprins între două pătrate perfecte consecutive.

Fie $a=n\cdot(n+1)$; $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\left.\begin{array}{r} n<n+1\Rightarrow n(n+1)<(n+1)^2 \\ n^2<n(n+1)\end{array}\right|\Rightarrow n^2<n(n+1)<(n+1)^2\Rightarrow$$

$\Rightarrow n^2<a<(n+1)^2\Rightarrow a$ nu este pătrat perfect.

2.3. Dacă *a* este număr prim, atunci *a* nu este pătrat perfect.

Demonstraţie: Presupunem, prin reducere la absurd, că a este pătrat perfect. Rezultă că există $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $a=k^2$, adică $a=k\cdot k$, de unde $a\,\vdots\,k$ şi $a\neq k, k\neq 1$, contradicţie cu faptul că a este prim. Presupunerea a fost falsă şi a nu este pătrat perfect.

2.4. Dacă a este număr natural, iar p este număr prim astfel încât $p|a$ şi $p^2\nmid a$, atunci a nu este pătrat perfect. Aceasta este o consecinţă a faptului că, dacă p este prim şi $p|a$, iar a este pătrat perfect, atunci $p^2|a$.

EXEMPLUL 11: Numărul $a=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 16$ nu este pătrat perfect pentru că există $p=13$ astfel încât $p|a$ şi $p^2\nmid a$

2.5. Dacă în descompunerea în factori primi a numărului natural a există cel puţin un factor care nu este pătrat perfect, atunci a nu este pătrat perfect.
Afirmaţia rezultă din 1.5. prin reducere la absurd.

EXEMPLUL 12: $a=(16\cdot 45)^3$ nu este pătrat perfect pentru că descompunerea sa în factori primi este $a=2^{12}\cdot 3\cdot 5^3$ şi conţine factorul 5^3 care nu este pătrat perfect.

2.6. Dacă numărul natural a are un număr par de divizori naturali, atunci a nu este pătrat perfect.

Demonstraţie: Vom demonstra că numărul divizorilor oricărui pătrat perfect este impar. Pentru acestea, ne amintim că, dacă $a=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}$ este descompunerea în factori primi a numărului a, atunci numărul divizorilor lui a este $\sigma(a)=(n_1+1)(n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_k+1)$. Cum a este pătrat perfect, numerele $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sunt pare $\Rightarrow$ toţi factorii $n_1+1,\ n_2+1,\ \ldots,\ n_k+1$ sunt numere impare $\Rightarrow \sigma(a)$ este număr impar.

EXEMPLUL 13: Numărul $a=3^{105}\cdot 7^{68}\cdot 5^{102}$ are $106\cdot 65\cdot 103$ divizori, adică are un număr par de divizori, deci nu este pătrat perfect.

2.7. Pentru orice număr natural $n\geq 3$, există $r\in\{0,\ 1,\ n-1\}$ astfel încât $A_r=\{n\cdot k+r \mid k\in\mathbb{N}^*\}$ nu conţine niciun pătrat perfect.

EXEMPLUL 14: Nu există pătrate perfecte de forma $3k+2$.

Vom demonstra că pentru orice număr natural a pătratul său, a^2, se scrie în una din formele: $a^2=3k$ sau $a^2=3k+1$. Folosind teorema împărţirii cu rest, $a=3p+r, r\in\{0,\ 1,\ 2\}$. Pentru $r=0\Rightarrow a^2=9p^2=3\cdot(3p^2)=3k$ cu $k=3p^2$. Pentru $r=1\Rightarrow a^2=9p^2+6p+1=3(3p^2+2p)+1=3k+1$, unde $k=3p^2+2p$. Pentru $r=2\Rightarrow a^2=9p^2+12p+4=3(3p^2+4p+1)+1=3k+1$, cu $k=3p^2+4p+1$.

Obţinem că, *dacă un număr este de forma $3k+2$, atunci acesta nu este pătrat perfect.*

Observaţie: Cu justificări similare putem formula alte rezultate utile:

EXEMPLUL 15: Dacă numărul natural a are una dintre formele: $a=4n+2$; $a=4n+3$; $a=5n+2$; $a=5n+3$; $a=6n+2$; $a=6n+5$, ...atunci a nu este pătrat perfect.

A4: Cuburi perfecte

1. ***Pentru a demonstra că un număr natural este cub perfect:***

1.1. Numărul natural n se numeşte cub perfect dacă există un număr natural k astfel încât $n=k^3$.

EXEMPLUL 1: $0=0^3$; $1=1^3$; $8=2^3$; $1000=10^3$. Rezultă că numerele 0, 1, 8, 1000 sunt cuburi perfecte.

1.2. Produsul a două cuburi perfecte este cub perfect.

Demonstraţie: Fie $a=n^3$ şi $b=m^3$ cu $n, m\in\mathbb{N}$.

Atunci, $a\cdot b=n^3\cdot m^3=(n\cdot m)^3$ şi $n\cdot m\in\mathbb{N}\Rightarrow a\cdot b$ este cub perfect.

EXEMPLUL 2: $64^n\cdot 9^{3k}=(4^n)^3\cdot(9^k)^3\Rightarrow$ este cub perfect, ca produs de două cuburi perfecte.

1.3. Afirmaţia 1.2. se poate generaliza: Dacă $a_1, a_2, ..., a_k$ sunt cuburi perfecte, atunci produsul $p=a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_k$ este cub perfect.

EXEMPLUL 3: $a^{3k}\cdot 27^n\cdot b^{3p}=(a^k)^3\cdot(3^n)^3\cdot(b^p)^3$ este cub perfect, $\forall a,b\in\mathbb{N}^*, \forall n,k,p\in\mathbb{N}$.

Observaţie: Pentru $a_1=a_2=...=a_k$ cuburi perfecte, numărul $p=(a_1)^k$ este cub perfect, oricare ar fi $k\in\mathbb{N}$.

EXEMPLUL 4: $27^n\cdot 16^{3n}=\left[(3\cdot 16)^3\right]^n=(48^3)^n$ este cub perfect pentru că se scrie ca putere cu exponent natural a unui cub perfect.

1.4. Orice număr natural nenul, care se scrie ca putere cu exponentul multiplu al lui 3, este cub perfect.

Într-adevăr, pentru $k\in\mathbb{N}^*, k^{3n}=(k^n)^3$ şi $k^n\in\mathbb{N}$, deci k^{3n} este cub perfect.

Observaţie: Dacă un număr natural este scris ca putere cu exponent care nu se divide la 3, nu rezultă că acesta nu este cub perfect.

EXEMPLUL 5: a^2 are exponentul 2 şi $2\nmid 3$. Pentru $a=8$, obţinem $a^2=4^3$, care este cub perfect.

1.5. Un număr natural, descompus în factori primi, este cub perfect dacă şi numai dacă toţi factorii sunt cuburi perfecte.

Demonstraţie: Fie $a=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot...\cdot p_k^{n_k}$ cu $p_1, p_2, ..., p_k$ numere prime distincte.

Dacă $p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot...\cdot p_k^{n_k}$ sunt cuburi perfecte $\overset{1.3.}{\Rightarrow} a=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot...\cdot p_k^{n_k}$ este cub perfect.

Pentru reciprocă, luăm în considerare faptul că, dacă a este cub perfect, iar p este număr prim, divizor al lui a, atunci p^3 este divizor al lui a. Fie a cub perfect $\Rightarrow\exists n\in\mathbb{N}$ astfel încât $a=n^3$, $a=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot...\cdot p_k^{n_k}\Rightarrow p_i|n^3, \forall i=\overline{1,k}$. Cum descompunerea în factori primi este unică, făcând abstracţie de ordinea factorilor, rezultă că $n_i\,\vdots\,3, \forall i=\overline{1,k}\Rightarrow$ toţi factorii $p_i^{n_i}$ sunt cuburi perfecte.

2. ***Pentru a demonstra că un număr natural nu este cub perfect:***

2.1. Între două cuburi perfecte consecutive n^3 şi $(n+1)^3$ sunt exact $3n^2+3n$ numere naturale, dar niciunul dintre ele nu este cub perfect.

EXEMPLUL 6: Produsul a trei numere naturale nenule consecutive nu este cub perfect. Într-adevăr, fie $a=n(n+1)(n+2), n\in \mathbb{N}^*$.

$$\left.\begin{array}{l} n<n+1\\ n<n+2\end{array}\right| \Rightarrow n^2<(n+1)(n+2)\Big| \cdot n \Rightarrow n^3<a \ (1).$$

Pe de altă parte, $n^2+2n<n^2+2n+1 \Leftrightarrow n(n+2)<(n+1)^2 \big| \cdot (n+1) \Rightarrow n(n+1)(n+2)<$ $<(n+1)^3 \Rightarrow a<(n+1)^3 \overset{(1)}{\Rightarrow} n^3<a<(n+1)^3 \Rightarrow a$ nu este cub perfect.

2.2. Dacă a este număr prim, atunci a nu este cub perfect.

2.3. Dacă a este un număr natural şi p este un număr prim astfel încât $p|a$ şi $p^3\nmid a$, atunci a nu este cub perfect.

EXEMPLUL 7: Numărul $a=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 30$ nu este cub perfect pentru că $13|a$ şi $13^3\nmid a$.

2.4. Dacă în descompunerea în factori primi a numărului natural a există cel puţin un factor care nu este cub perfect, atunci a nu este cub perfect.
Acest rezultat se deduce prin reducere la absurd.

EXEMPLUL 8: Numărul $a=2^{12}\cdot 24^{16}$ nu este cub perfect pentru că descompunerea sa în factori primi este $a=2^{60}\cdot 3^{16}$ şi 3^{16} nu este cub perfect.

A5: Ultima cifră a unui număr natural

Determinarea ultimei cifre a unui număr ne oferă informaţii importante asupra proprietăţilor acestui număr. Uneori, este necesar să determinăm ultimele două cifre ale numărului.

Criteriile de divizibilitate cu 2, 5, 10 sunt în strânsă dependenţă cu ultima cifră a numerelor, iar criteriile de divizibilitate cu 4 şi 25 sunt în legătură cu ultimele două cifre ale numărului.

Ultima cifră a unui număr este utilă şi în a stabili dacă acest număr poate fi pătrat perfect.

Vom nota cu $u(n)=$ ultima cifră a numărului natural n. Aceasta este evident cifra unităţilor numărului n.

1. Dacă $n=\overline{a_1a_2...a_k}$, folosind scrierea sistematică în baza 10, $n=a_1\cdot 10^{k-1}+a_2\cdot$ $\cdot 10^{k-2}+...+a_{k-1}\cdot 10+a_k$, constatăm uşor că $n=10\left(a_1\cdot 10^{k-2}+a_2\cdot 10^{k-3}+...+a_{k-1}\right)+a_k$, ceea ce conduce la concluzia că $u(n)$ este restul împărţirii numărului n la 10.

EXEMPLUL 1: $u(275)=5$; $u(17309)=9$ şi $275=27\cdot 10+5$; $17309=1730\cdot 10+9$.

2. Pentru orice numere naturale n,m, $u(n+m)=u(u(n)+u(m))$.

EXEMPLUL 2: $u(1785+570989)=u(5+9)=4$.

3. Pentru orice numere naturale n,m, $u(n\cdot m)=u(u(n)\cdot u(m))$.

EXEMPLUL 3: $u(1785 \cdot 5739) = u(5 \cdot 9) = 5$.

4. Proprietățile 2 și 3 se pot generaliza:

a) Pentru k numere naturale $n_1, n_2, \ldots, n_k$, are loc relația $\mathrm{u}(n_1 + n_2 + \ldots + n_k) = \mathrm{u}(\mathrm{u}(n_1) + \mathrm{u}(n_2) + \ldots + \mathrm{u}(n_k))$.

b) Pentru k numere naturale $n_1, n_2, \ldots, n_k$, are loc relația $\mathrm{u}(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k) = \mathrm{u}(\mathrm{u}(n_1) \cdot \mathrm{u}(n_2) \cdot \ldots \cdot \mathrm{u}(n_k))$.

5. Pentru $n_1 = n_2 = \ldots = n_k$, obținem: $\mathrm{u}(n^k) = \mathrm{u}\left((\mathrm{u}(n))^k\right)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.

EXEMPLUL 4: $\mathrm{u}(18^3) = \mathrm{u}(8^3) = 2$.

6. Pentru determinarea ultimei cifre a diferenței a două numere naturale $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ și $m = \overline{b_1 b_2 \ldots b_p}$ sunt două posibilități:

a) Dacă $a_k < b_p$, atunci $\mathrm{u}(n - m) = \mathrm{u}(\overline{1a_k} - b_p)$.

b) Dacă $a_k \geq b_p$, atunci $\mathrm{u}(n - m) = \mathrm{u}(a_k - b_p) = a_k - b_p$.

EXEMPLUL 5: $\mathrm{u}(173958 - 49879) = \mathrm{u}(18 - 9) = 9$.

EXEMPLUL 6: $\mathrm{u}(173958 - 49873) = \mathrm{u}(8 - 3) = 5$.

Sunt numeroase cazuri în care este necesară determinarea ultimei cifre a unui număr natural.

Din 5. rezultă că este suficient să cunoaștem ultima cifră a puterilor numerelor de o cifră, aceasta conducând la algoritmi cu caracter general.

7. Dacă $n \in \{0, 1, \ldots 9\}$, atunci $u(n^k)$ este dată de:

7.1. $u(0^k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}^*; u(1^k) = 1, \forall \in \mathbb{N}^*$

7.2. $u(5^k) = 5, \forall k \in \mathbb{N}^*; u(6^k) = 6, \forall \in \mathbb{N}^*$

7.3. Ultima cifră a puterilor numerelor 2, 3, 7, 8 este dată de tabelul următor. Cum acestea se repetă din 4 în 4, considerăm $k = 4p + r$ cu $r \in \{0, 1, 2, 3\}$.

k	$4p$	$4p+1$	$4p+2$	$4p+3$
$\mathrm{u}(2^k)$	6	2	4	8
$\mathrm{u}(3^k)$	1	3	9	7
$\mathrm{u}(7^k)$	1	7	9	3
$\mathrm{u}(8^k)$	6	8	4	2

7.4. Ultima cifră a puterilor numerelor 4 și 9 se repetă din 2 în 2. Considerăm $k = 2p + r$ cu $r \in \{0, 1\}$.

k	$2p$	$2p+1$
$\mathrm{u}(4^k)$	6	4
$\mathrm{u}(9^k)$	1	9